

Dualitätsprinzip

by Thomas Zwick

INSTITUT FÜR HOCHFREQUENZTECHNIK UND ELEKTRONIK



- Dualitätsprinzip
- Streifendipol
- Rahmenantenne

Dualitätsprinzip / Babinet'sche Prinzip

Wenn \vec{E}^P und \vec{H}^P die Maxwell Gleichungen erfüllen, gilt dies automatisch auch für \vec{E}^D und \vec{H}^D mit

$$\vec{E}^D = Z_{F0} \vec{H}^P$$
$$\vec{H}^D = -\frac{1}{Z_{F0}} \vec{E}^P$$

Beweis:

Maxwell für \vec{E}^D und \vec{H}^D :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^D &= j\omega \epsilon_0 \vec{E}^D \\ \text{rot } \vec{E}^D &= -j\omega \mu_0 \vec{H}^D \end{aligned} \quad \text{mit } Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{rot } \vec{E}^P = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{H}^P$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{rot } \vec{H}^P = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{E}^P$$

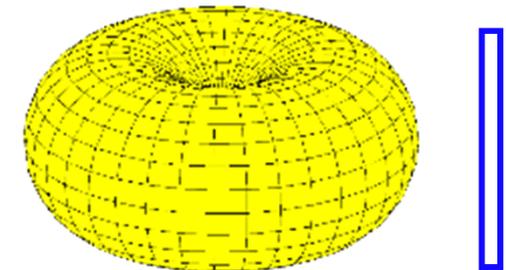
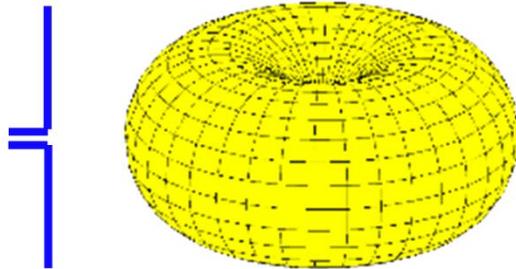
$$\Rightarrow \text{Maxwell für } \vec{E}^P \text{ und } \vec{H}^P$$

elektrischer Dipol

magnetischer Dipol

$$\underline{\vec{E}}^D = Z_{F0} \underline{\vec{H}}^P$$

$$\underline{\vec{H}}^D = \frac{-1}{Z_{F0}} \cdot \underline{\vec{E}}^P$$



D = duales Feld

P = primäres Feld

Elektrischer Hertz ‘scher Dipol (Duales Feld)

$$Z_F = \frac{\omega\mu}{k}$$

Magnetischer Hertz ‘scher Dipol (Primäres Feld)

$$\underline{E}_r^D = \underline{E}_r^D = -A_0 \cos \theta j\omega \left(\frac{2j}{(kr)^2} + \frac{2}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$

$$\underline{E}_\theta^D = \underline{E}_\theta^D = A_0 \sin \theta j\omega \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$

$$\underline{H}_\psi^D = \underline{H}_\psi^D = A_0 \sin \theta \frac{jk}{\mu} \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right) e^{-jkr}$$

$$\underline{H}_r^P = -A_0 \cos \theta \frac{jk}{\mu} \left(\frac{2j}{(kr)^2} + \frac{2}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$

$$\underline{H}_\theta^P = A_0 \sin \theta \frac{jk}{\mu} \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$

$$\underline{E}_\psi^P = -A_0 \sin \theta j\omega \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right) e^{-jkr}$$

Nur Nahfeld des magnetischen Hertz ‘schen Dipols

$$\underline{\vec{H}}^P \approx -\frac{jA_0}{\mu k^2 r^3} \cdot (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) \cdot e^{-jkr}$$

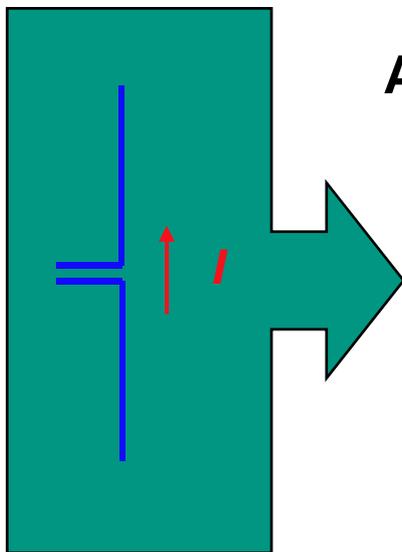
**Magnetischer
Hertz ‘scher Dipol
(Primäres Feld)**

$$\underline{H}_r^P = -A_0 \cos \theta \frac{jk}{\mu} \left(\frac{2j}{(kr)^2} + \frac{2}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$
$$\underline{H}_\theta^P = A_0 \sin \theta \frac{jk}{\mu} \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{-jkr}$$
$$\underline{E}_\psi^P = -A_0 \sin \theta j\omega \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right) e^{-jkr}$$

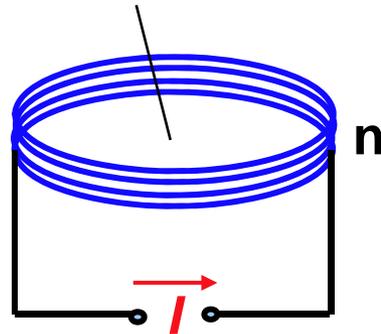
Nahfeld des magnetischen „Hertz ‘schen“ Dipols

Nur Nahfeld des magnetischen Hertz ‘schen Dipols

$$\underline{\vec{H}}^P \approx -\frac{jA_0}{\mu k^2 r^3} \cdot (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) \cdot e^{-jkr}$$



A (Windungsfläche)



$$\frac{nIA}{4\pi r^3} = -\frac{jA_0}{\mu\beta_0^2 r^3}$$

$$\Rightarrow A_0 = j \frac{nIA\mu k^2}{4\pi}$$

Magnetfeld einer kleinen, stromdurchflossenen Spule (Biot-Savart)

$$\underline{\vec{H}}^P \approx \frac{nIA}{4\pi r^3} \cdot (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)$$

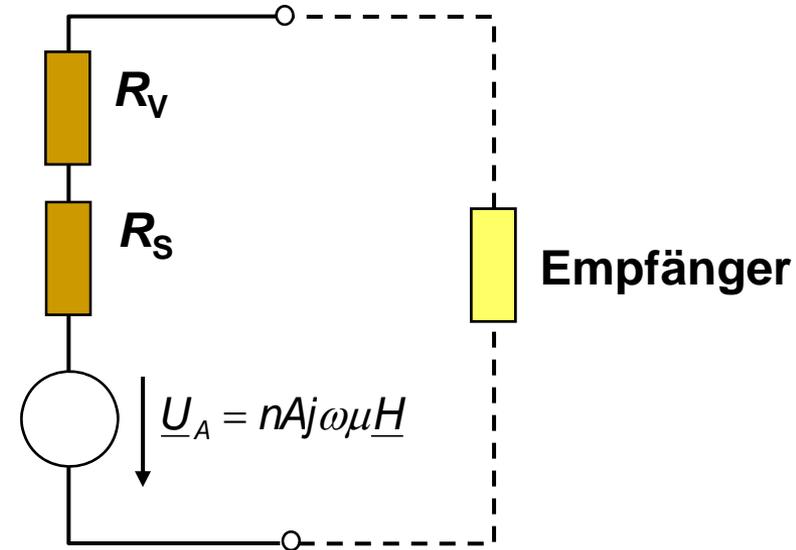
Strahlungskenngrößen des magnetischen Dipols (1)

$$P_S = r^2 \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_r \sin \theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} \frac{Z_{F0}}{\mu^2} |\underline{A}_0|^2 = \frac{1}{2} R_S |I|^2$$


$$R_S = \frac{8\pi^3}{3} Z_{F0} \left(\frac{nA}{\lambda_0^2} \right)^2$$

Strahlungskenngrößen des magnetischen Dipols (2)

$$P_{E,\max} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\underline{U}_A}{2}\right)^2}{R_S} = \frac{|\underline{U}_A|^2}{8R_S} \quad \text{für } R_S \gg R_V$$



$$\underline{U}_A = nAj\omega\mu H$$

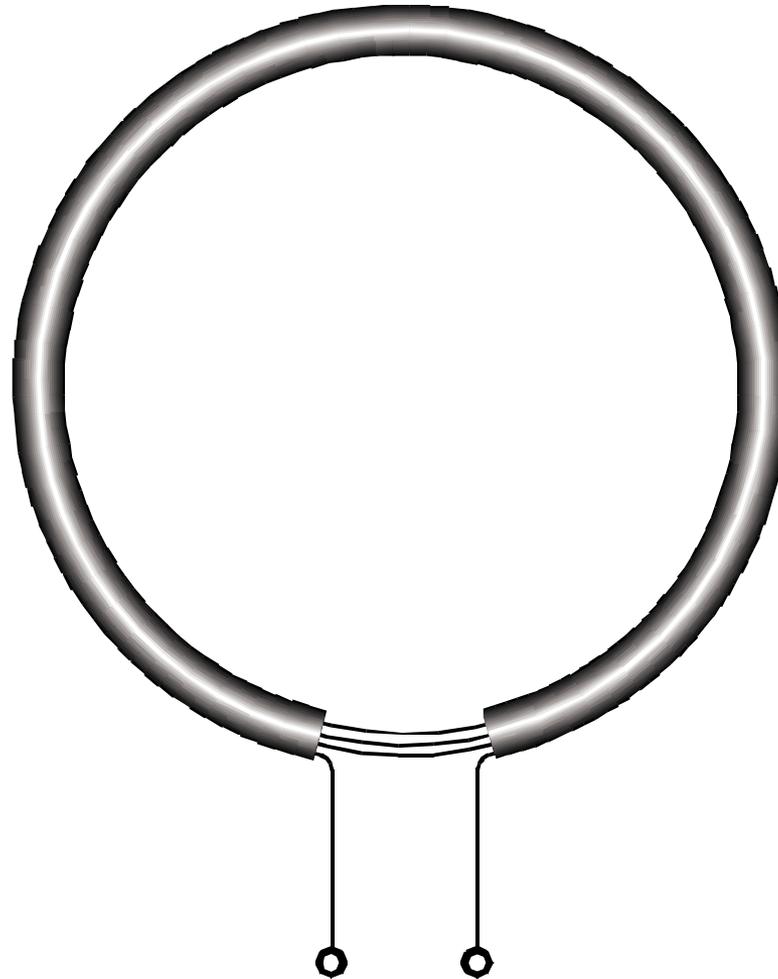
$$|\underline{U}_A|^2 = (\omega\mu nA)^2 \frac{2|\vec{S}|}{Z_{F0}}$$

$$A_w = \frac{P_{E,\max}}{|\vec{S}|} = \frac{|\underline{U}_A|^2}{8|\vec{S}|R_S} = \frac{(\omega\mu nA)^2 \frac{2|\vec{S}|}{Z_{F0}}}{8|\vec{S}| \cdot \frac{8\pi^3}{3} \cdot Z_{F0} \cdot \left(\frac{nA}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2$$

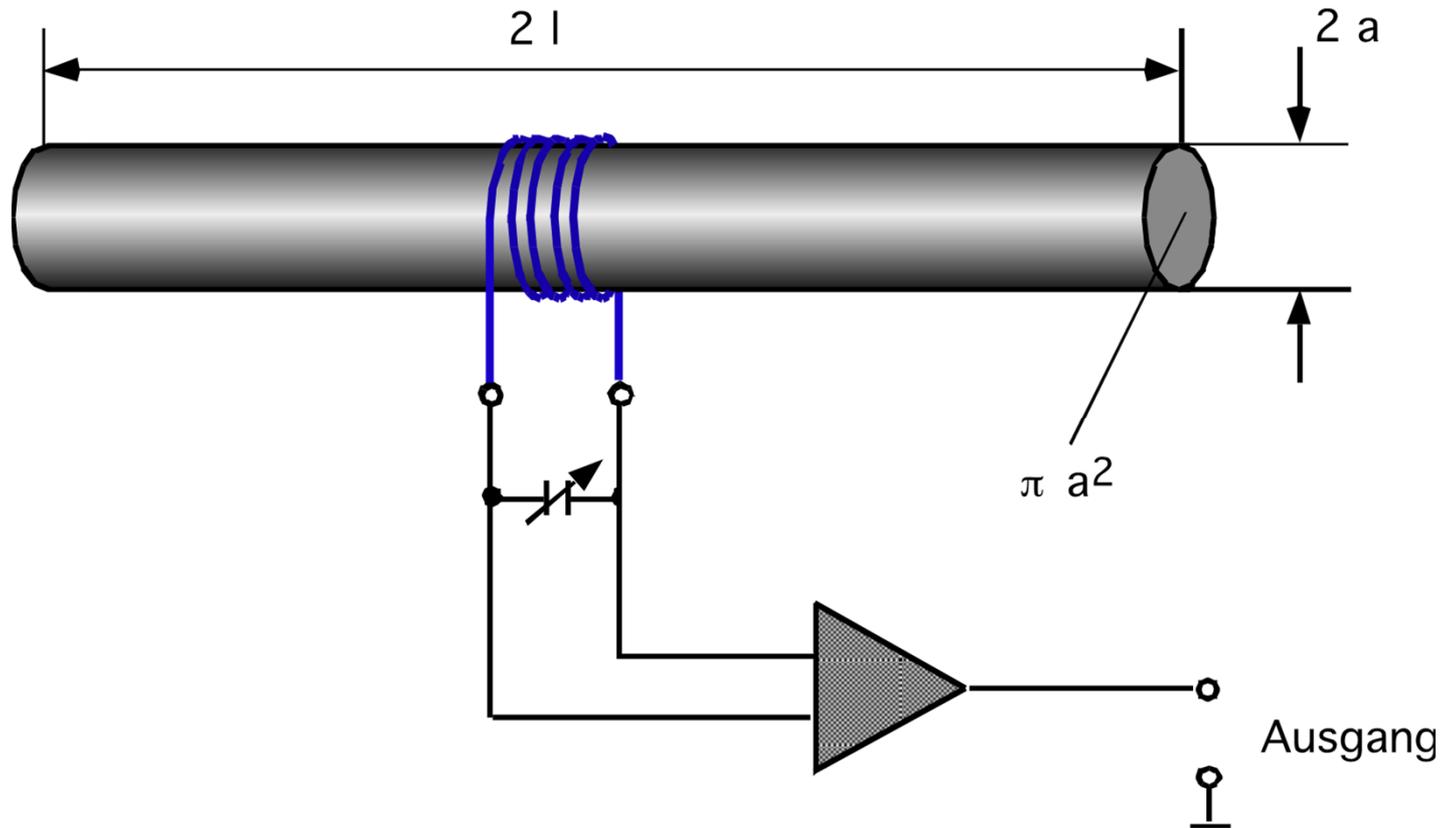
$$G_i = \frac{3}{2}$$

$$A_w = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} G_i$$

Rahmenantenne

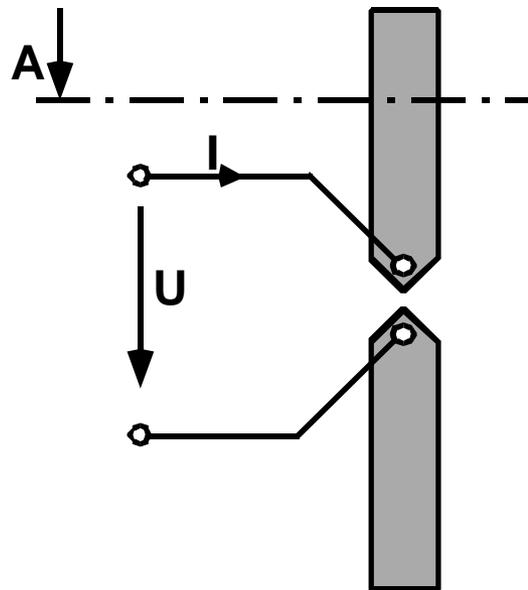


Ferritstabantenne mit Empfänger-Eingangskreis

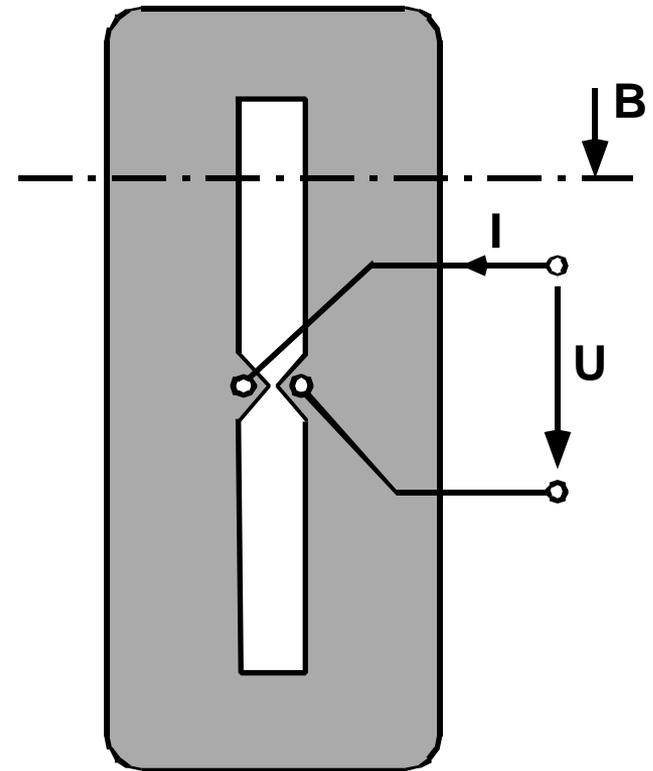


Dualität Streifendipol - Schlitzantenne

Streifendipol
primär



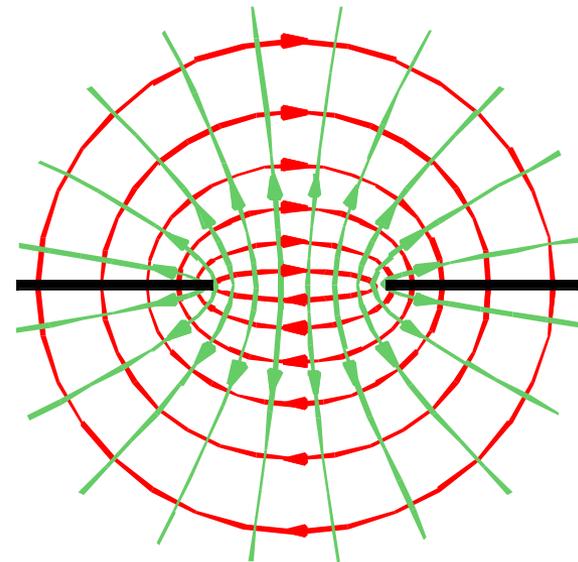
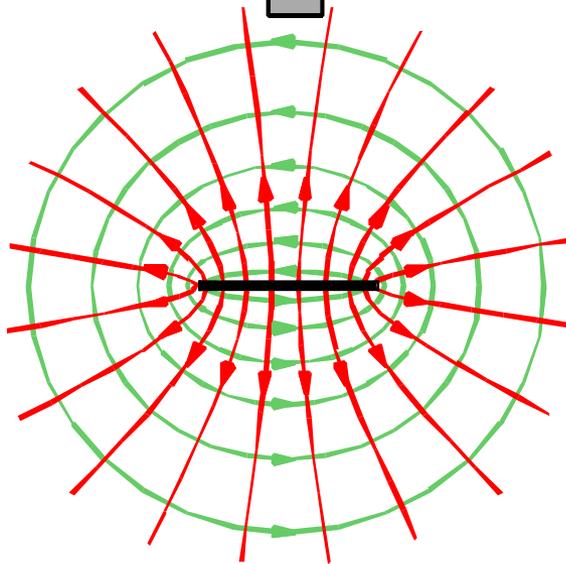
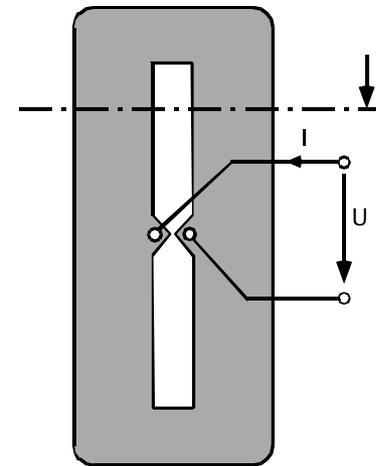
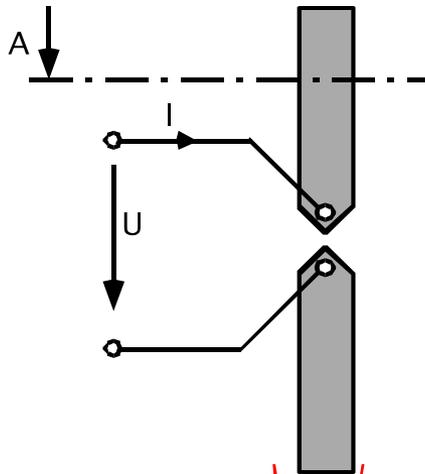
Schlitzantenne
dual



Aus Dualitätsprinzip:

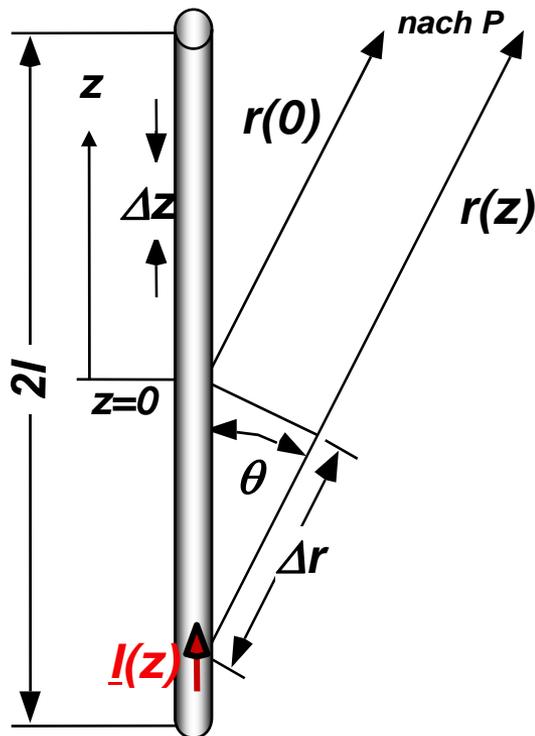
$$R_S^S \cdot R_S^D = \frac{Z_{F0}^2}{4}$$

Dualität Streifendipol - Schlitzantenne



— E-Felder
— H-Felder

Geometrie



Elektrisches Fernfeld des Hertz 'schen Dipols:

$$\underline{E}_{\theta HD} = I(z) dz \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r(z)}}{r(z)} j\omega \sin\theta$$

Elektrisches Fernfeld des linearen elektrischen Dipols:

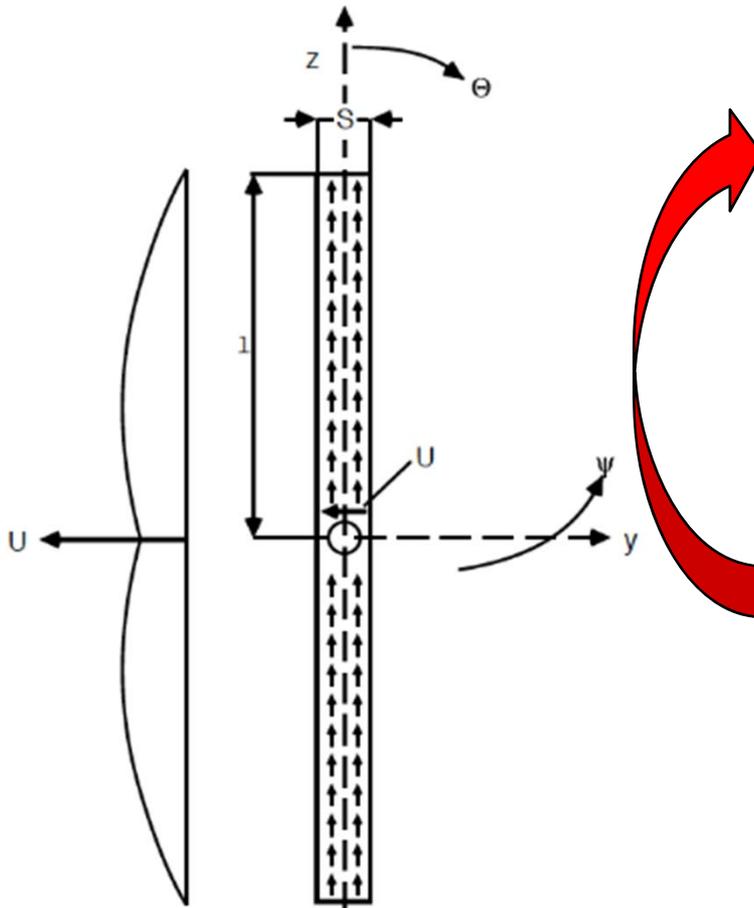
$$\underline{E}_{\theta} = \underbrace{j\omega \frac{\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r(0)}}_{\text{Abstandsfaktor } A(r)} \underbrace{\sin\theta \int_{-l}^l \underline{I}(z) \cdot e^{j\beta z \cos\theta} dz}_{\text{und Richtungsfaktor } F(\theta) \text{ der Feldstärke}}$$

Magnetisches Fernfeld der linearen Antenne:

$$\underline{H}_{\psi} = \frac{\underline{E}_{\theta}}{Z_{F0}}$$

Fernfeld einer magnetischen linearen Dipolantenne

Geometrie



Magnetisches Fernfeld des linearen magnetischen Dipols:

$$\underline{H}_\theta^S = \underbrace{j\omega \frac{\epsilon_0}{2\pi r} e^{-j\beta r(0)}}_{\text{Abstandsfaktor } A(r)} \underbrace{\sin\theta \int_{-l}^l \underline{U}(z) \cdot e^{j\beta z \cos\theta} dz}_{\text{und Richtungsfaktor } F(\theta) \text{ der Feldstärke}}$$

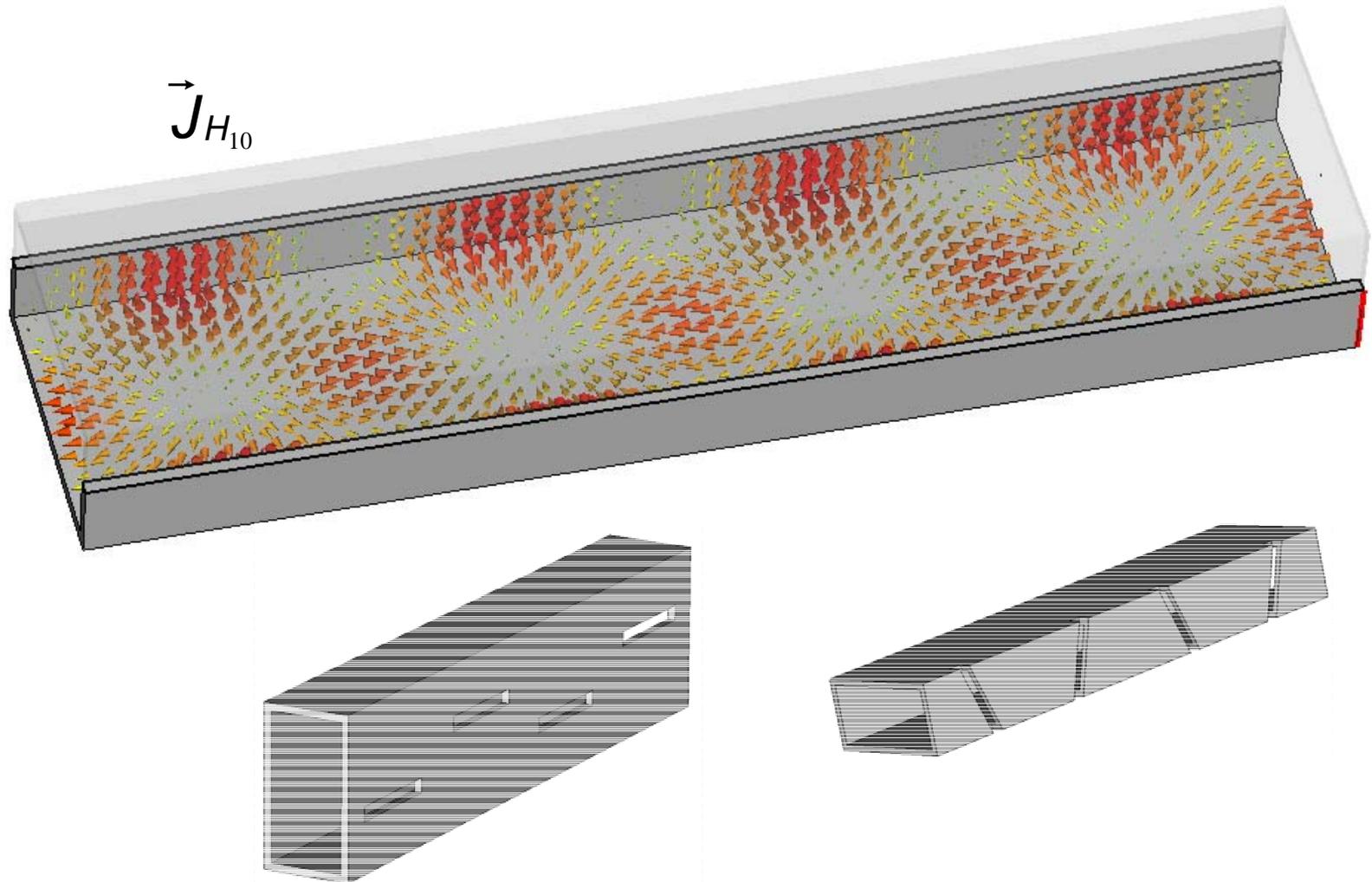
Elektrisches Fernfeld des linearen elektrischen Dipols:

$$\underline{E}_\theta = \underbrace{j\omega \frac{\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r(0)}}_{\text{Abstandsfaktor } A(r)} \underbrace{\sin\theta \int_{-l}^l \underline{I}(z) \cdot e^{j\beta z \cos\theta} dz}_{\text{und Richtungsfaktor } F(\theta) \text{ der Feldstärke}}$$

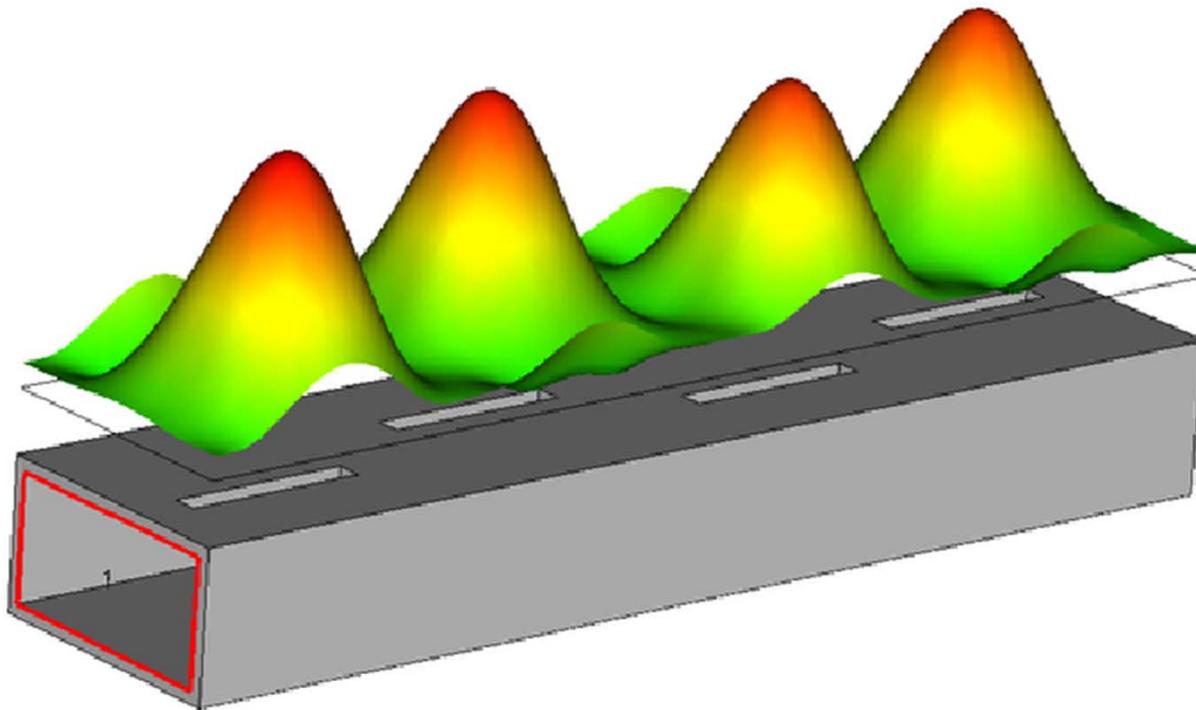
Elektrisches Fernfeld des magnetischen Dipols:

$$\underline{E}_\psi = -Z_{F0} \underline{H}_\theta$$

Hohlleiterschlitzzstrahler Prinzip mit H10-Welle

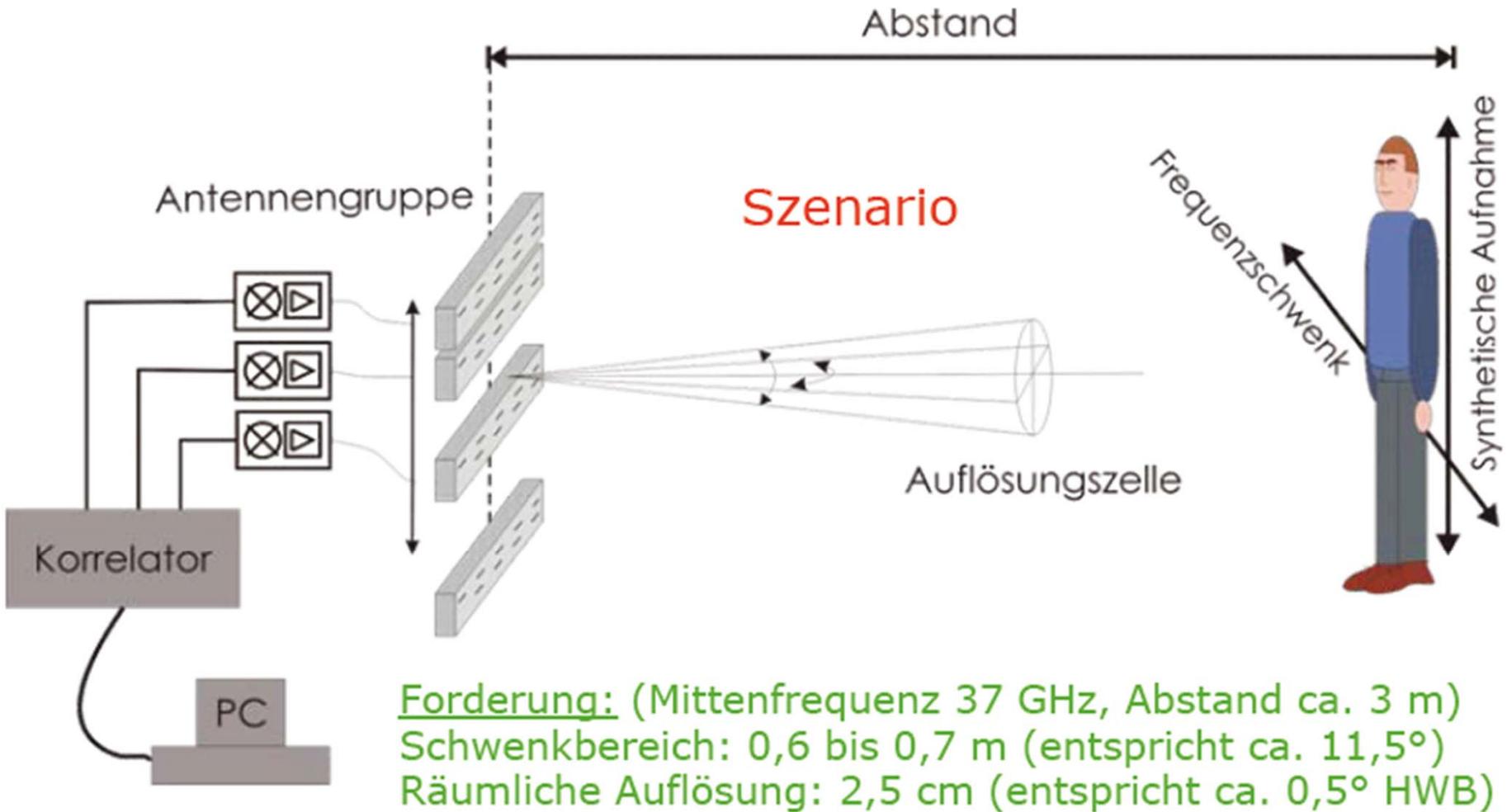


Hohlleiterschlitzzstrahler Prinzip, E-Feld

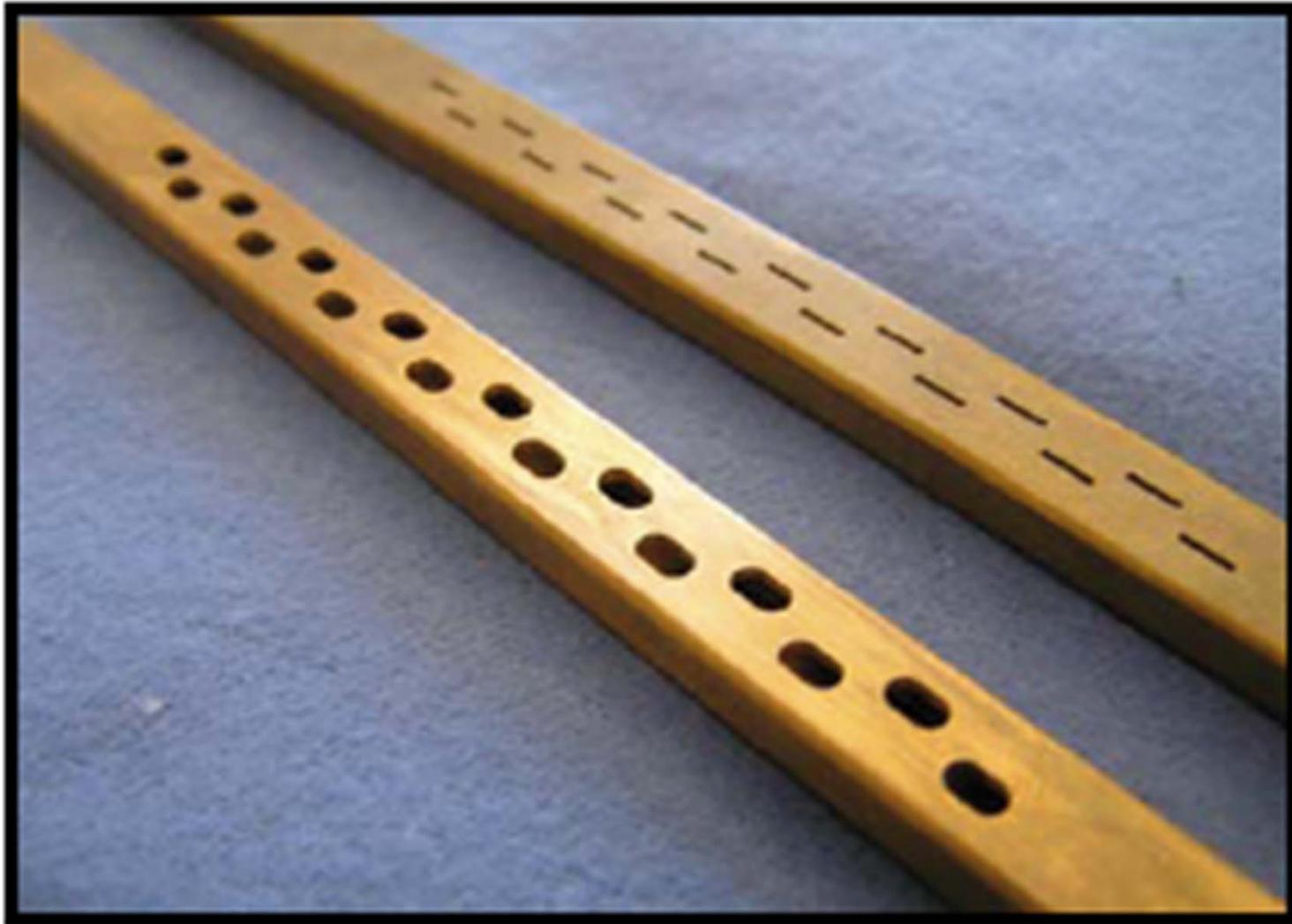


Type = E-Field (peak)
Monitor = e-field (f=10) [1]
Component = Abs
Plane at y = 11
Frequency = 10
Phase = 0 degrees
Maximum-Zd = 895.558 V/m at -2 / 11 / -33.4861

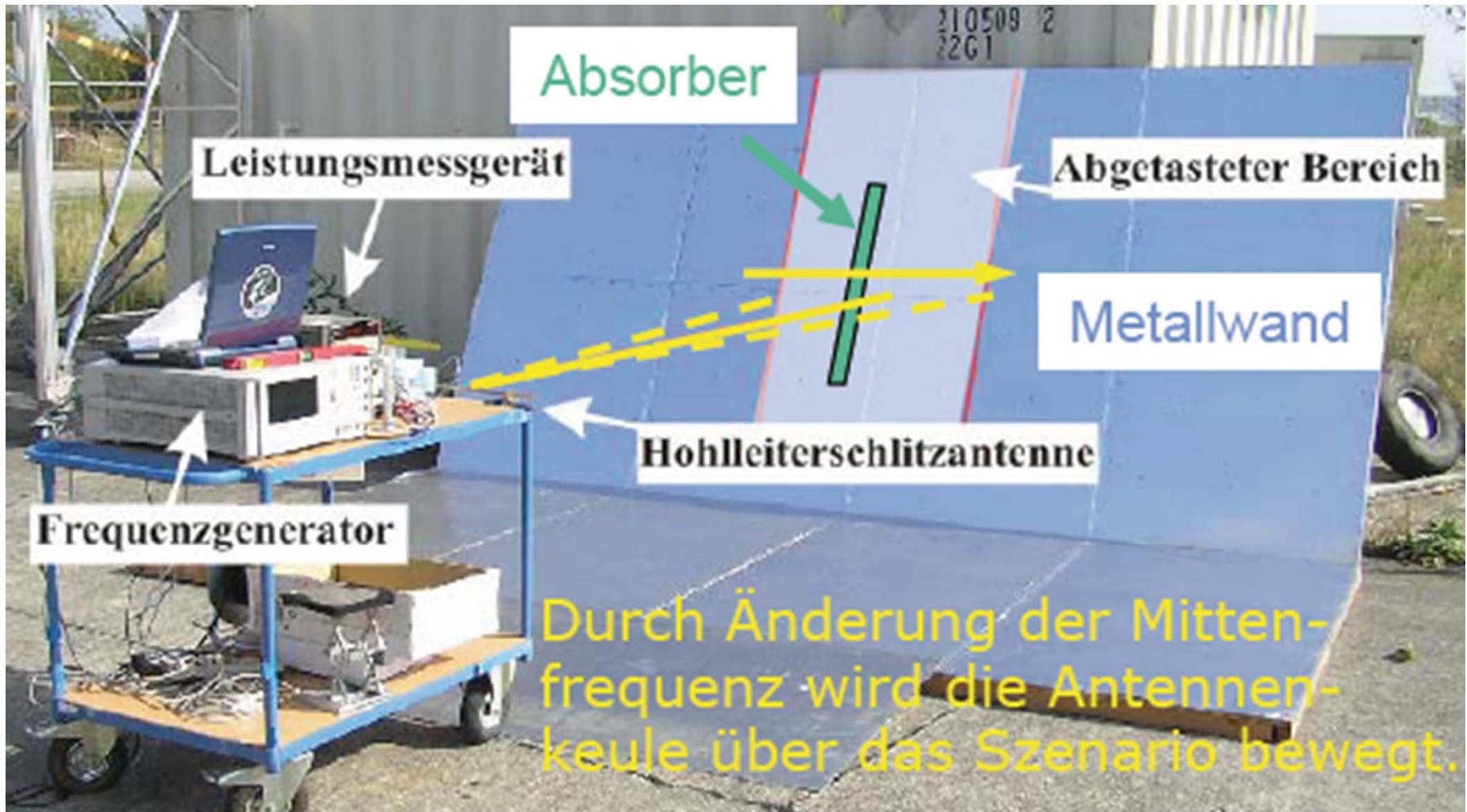
Beispiel für Hohlleiterschlitzstrahler (1)



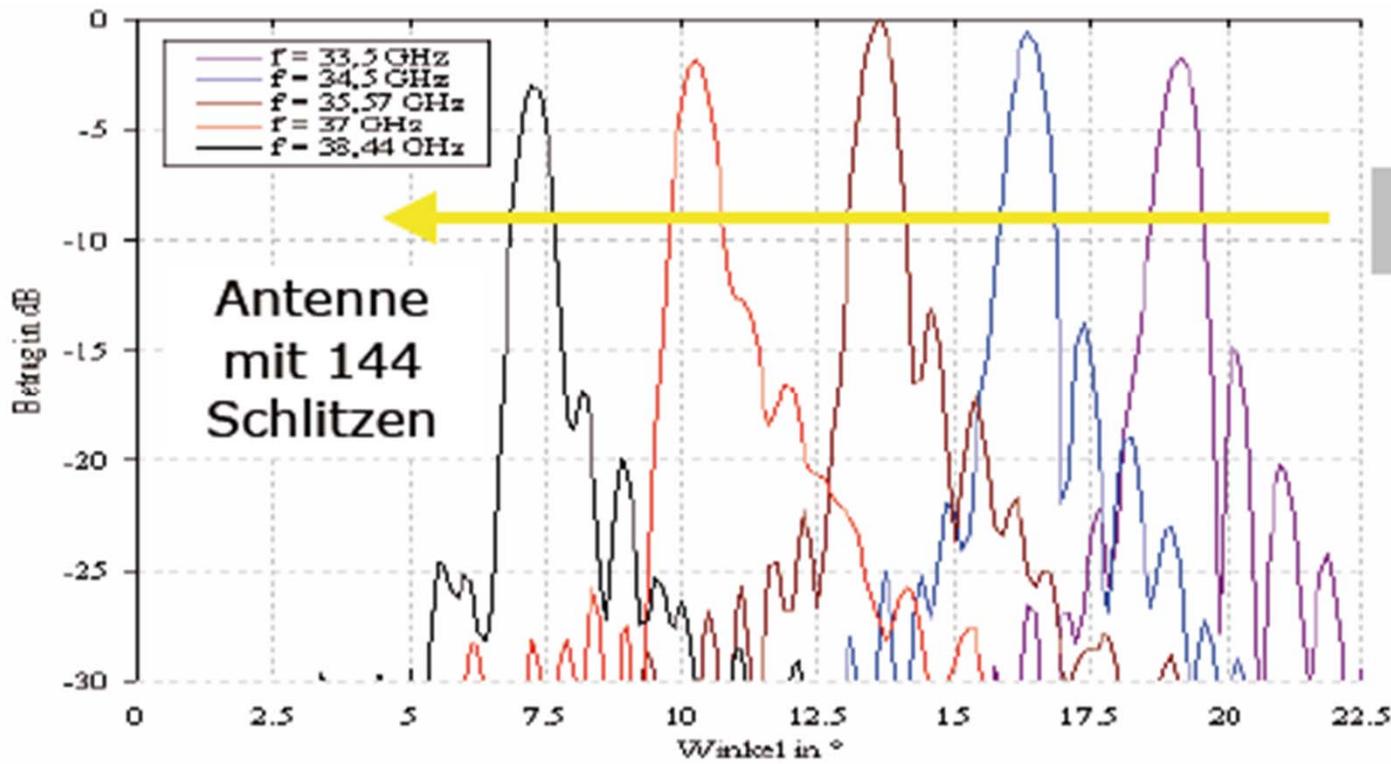
Beispiel für Hohlleiterschlitzzstrahler (2)



Beispiel für Hohlleiterschlitzstrahler (3)



Beispiel für Hohlleiterschlitzstrahler (4)



Frequenz

